기술논단

화재실의 열유동 해석을 위한 수치 해석 방법

Numerical Analysis Methods for Heat Flow in Fire Compartment

김광선 / 한국기술교육대학 교수, 공박 · 손봉세 / 경원전문대학 교수

– PREFACE –

This article investigates the different numerical methods, which are widely used for the purpose of simulating a fire compartment the particular numerical methods such as finite difference, finite element, control Volume, and finite analysis are discribed in order to understand basic concepts and their applications. The fire simulations using different methods for the different physical geometrics have been reported in many recent literatures The convergence rate, the accuracy, and the stability are not simply dependent upon the specific method. The study of popular numerical methods by being compared among those is therefore significant to understand the numerical simulation of fire compartment.

목 차

1. 서 론

컴퓨터 기술의 눈부신 발전은 첨단정보화 시대로 하여금 보다 효율적이고 생산적인 시스템으로의 변화를 요구하고 있다. 최근 첨단기술의 발전과 더불어 자연환경, 각종공업용장치, 그리고 생체계에서 일어나는 열전달 및 물질전달, 유체유동, 화학반응, 화재분석 등의 여러 분야에 걸쳐 폭넓게 컴퓨터의 기술이 활용되고 있는 실정이다. 물론 물리현상에 관한 가장 믿을만한 정보는 실제 실험을 통해서 얻을 수 있다.

실험적 연구는 실물과 같은 크기로 복제된 실험장

치와 동일 조건하에서 어떻게 작동하는가를 예측하기 위해 이용된다. 이러한 실물크기를 사용하여 수행하는 실험은 비용이 많이 들 뿐 아니라 거의 불가능하다. 이의 대안으로서 축소 모델을 사용하여 실험을 수행할 수도 있으나 결과적으로 얻어지는 정보는 실물크기에 대하여 보간을 행하여야 하며 이를 위한 일반적인 법칙도 없다. 또, 축소 모델이 실물 크기 장치의 모든 특징을 항상 묘사할 수 있는 것은 아니다. 또한 방법으로는 컴퓨터 수치해석 방법이 있다.

어떤 문제에 대한 컴퓨터 해석은 상세하고 완벽한 정보를 주며 이는 관심있는 전 영역에 걸쳐서 관련된 모든 변수값을 알 수 있고, 프로그램에서 아주 작은 물체 또는 아주 큰 물체, 아주 낮은 온도 또는 아주 높은 온도, 유독성물질, 인화성물질 등 여러 현상과 형상을 취급하는데 큰 어려움이 없다.

그러나 컴퓨터 해석은 이론적 예측이 실제 물리적 모델의 결과라기 보다는 수학적으로 모델화된 내용을 풀이하는 것이고 실험연구는 실제 그 자체를 관찰하는 것이다. 그러므로 수학적 모델의 타당성은 이론 계산의 유용성에 한계가 있으므로 컴퓨터 수치해석 방법이 만능이 아니라는 점을 분명히 하고자 한다.

특히 화재는 복잡한 연소메카니즘을 가지고 있을 뿐만 아니라 연소현상이 가연물, 착화원, 주위조건(압력, 온도, 속도, 농도, 난류강도 등)에 따라 연소성(Flammability)이 좌우되기 때문에 실험에 의한 유용성은 더욱 한계를 가지고 된다. 따라서, 많은 잠재 위험을 내포하고 있는 화재 분석을 위한 각 조건에 따라 실험 연구를 한다는 것은 불가능하기 때문에 더욱 컴퓨터를 이용한 수치적 해석 방법이 선진국을 중심으로 활발히 연구되어 지고 있기에 본 보고에서 개괄적으로 컴퓨터 수치해석 방법에 관해 논하고자 한다.

2. 배 경

이론적으로 풀 수 없는 미분방정식은 수치방법을 이용한다. 대부분의 수치 방법들은 다음과 같은 유사성을 갖는다.

첫째, 모든 방법은 미분방정식이 적용되는 전체 영역을 일정 수의 작은 요소(small element)와 격자점(gridpoint)으로 분할함으로써 미분방정식의 연속해(continuous solution)를 유한 수의 격자점이나 요소에서의 불연속값(discrete Value)으로 대체한다.

둘째, 모든 방법은 격자점사이나 지역적인 요소 전체에 알맞은 차이 근사치(difference appor oximationa)나 종속변수의 함수도에 의한 미분방정식으로부터 대수방정식을 유도한다.

셋째는, 대수방정식들은 모든 격자점에 있어서 주어진 경계조건(boundary condition)과 초기조건(initial condition)을 만족하며 수치해(numerical solution)가 얻어진다.

수치 방법은 미분방정식에 대응되는 대수방정식이 어떻게 유도되느냐에 따라 구별된다. 유한차분법(finite difference method)에 있어서 비연속적인 대수방정식을 유도하는 두가지 방법으로는 테일러급수(Taylor series)와 제어체적(control volume)방식이 있으며 유한요소방식(finite element method)에 있어서는 변수적 수식화(Variational formulation)와 가중치를 부여한 잉여방식이 사용된다. Taylor 급수방식에 있어서는 유한차 대수방정식이 절단된 Taylor 급수에 의하여 미분방정식의 미분항을 나타낸다. 절단(truncation) 항에 따라서 여러 종류의 유한차 방법이 얻어지며, 이 방식의 타당성은 어떻게 급수의 절단이 되고 유한차(finite difference)를 택했느냐에 달려 있다.

유한 요소방법에서는 에너지방식(변수적 수식화)과 가중치 방법이 있으며, 에너지방식을 푸는 것으로 "함수의(function)"라 하는 양(quantity)을 최소화 하는 것에 상당하며, 변수적원리(variational principle)라 한다. 채택된 "함수의"에 따라 불연속적인 요소방정식을 유도하는데 여러 가지 변수적 수식화가 적용될 수 있다. 그러나 유체유동문제에 있어서의 변수적수식화의 적용은 변수적 원리가 유체 유동을 기술하는 미분방정식에 항상 존재하지는 않으므로 한계가 있다.

가중치를 적용한 잉여방정식은 근사해나 실험해(trial solution)를 적용되는 미분방정식에 대체한 후 남는 잉여(residual)를 최소화하는데 근거를 두고 있다. 근사함수는 기 알려진 함수와 결정해야 할 상수로써 구성을 하며 상수를 결정하기 위하여 나머지로써 잉

여를 적당한 가중함수(weighting function)와 함께 최소화하는 것이다. 정확도는 실험함수와 가중함수에 따라 상당히 영향을 받는다. 대수방정식을 얻는 또다른 유한차 방법으로는 미분방정식이 미분량(infinitesimal)의 제어체적(control volume)에 보존의 법칙(conservation law)을 적용하는 것처럼 유한(finite)제어체적의 종속변수에 대한 보존의 법칙을 적용하는 것이다. 이와 같은 방법은 격자점을 둘러싸고 있는 겹치지 않은 제어체적을 적분함으로써 얻어진다.

제어체적방식은 가중치를 부여한 잉여방식의 부영역(subdemain) 방법의 변형으로 간주되며, 그 근간이 더욱 기하학적(physical)이다. 이 방식의 정확도는 두 격자점 사이에 사용되는 보간함수(interpolation function)에 상당히 의존한다.

유한해석방법(finite analytic method)은 또다른 대수방정식을 유도하며 유한차나 유한요소방법과는 달리 비연속적 대수방정식이 유한해석방식에 의한 각 요소의 해석해(solution)로부터 얻어진다. 이러한 방식은 미분방정식에 의하여 표현되는 문제의 영역을 작은 요소로 나눔으로써 기하학적으로 단순함 때문에 그리고 비선형 문제의 선형화함으로써 해석해가 얻어진다. 해석해가 작은 요소의 내부노드(interior node)에서 얻어질 때 내부노드와 외부노드와 관련시키는 대수방정식을 유도한다. 따라서, 전체영역의 수치해는 작은 요소의 해석해를 조합하거나 겹침으로써 얻어진다.

3. 성공적인 수치적 방법 선택의 근거

수치해석방법의 성공적인 선택을 위한 4가지 요건은 정확도(accuracy), 시간효과(timeefficiency), 저장효과(storage efficiency)와 프로그래밍의 용이성(easy of progrmming)을 들 수 있다.

(1) 정확도란 계산된 결과와 바람직한 결과의 차에 의하여 생기는 오차에 의하여 측정된다.

절대오차(absolute error) $-\epsilon\chi \cong \chi^{*} - \chi$

상대오차(relative error) $-\epsilon\chi/\chi$

(2) 시간효과란 수치방법(numerical method)을 실행하는데 소요되는 컴퓨터 시간에 의하여 측정된다.

(3) 수치방법에 의하여 소요되는 저장량(amount of storage)의 최소화는 컴퓨터 크기의 증가에 따라 점점 그 중요성이 감소하는 것이 사실이나 대형 프로젝트는 대형 컴퓨터라 할지라도 상당량의 메모리를 필요로하며 저장량의 최소화는 자주 관심사가 된다. 저장량과 컴퓨터 시간은 상호 보완 관계를 맺으며 저장할 수 있는 값을 다시 계산할 수 있는 경우가 좋은 본보기 이다. 따라서 전반적 효율을 측정할 때는 시간효과와 저장효과에 적당한 가중치를 적용하여 산정하는 것이 바람직하다.

(4) 프로그래머가 필요로 하는 시간도 중요한 요소가 되나 일단 프로그램이 작성되면 반복적으로 사용되므로 납득할 수 있을 정도의 프로그래밍 시간은 프로그램 실행과 정확도를 위한 시간효과(time efficiency)와 비교해 볼 때 커다란 중요성은 부여하지 않는다. 더욱 중요한 것은 쉽게 이해하고 변형이 용이한 프로그램 작성이 필요하다. 빠른 컴퓨터 속도, 대용량의 저장능력, 상대적으로 정확한 부동수(floating point numbers) 계산을 할 수 있는 최신형 컴퓨터라도 정확도와 효율성이 잘못 이해될 수가 있다.

일반적으로 정확도와 효율성이 쉽게 얻어질 수 있다고 생각될 수 있으나 그렇지 않다. 수치계산의 성공여부는 다음과 같은 5가지 조건에 의존된다고 볼 수 있다.

① 부동수 연산(floating point arithmetic) : 모든 연산 작업에서 반올림이하의 수는 오차를 발생한다.

② 민감도(sensitivity) : 연산 작업을 하면서 오차가 심하게 발생할 경우 전체 작업이 민감하다고 한다.

③ 불안정성(instability) : 불안정성은 한정적인 정밀연산을 실행함에 있어서 필요불가결한 반올림에 의한 오차에 대한 함수(f(x))를 수치적으로 계산할 때 나타나는 민감도를 의미한다.

④ 발산(divergence) : 반복적인 방법을 사용할 경우 어떤 조건에서 수렴하는가를 결정할 수 있어야 하며 특정문제에 있어서 수렴할수 있는 수치해석 방

법을 택해야 한다.

⑤ 비효율성(inefficiency) : 통상적인 비 효율의 원인은 많은 반복이 필요한 경우를 말한다.

4. 수치 해석 방법

(1) 유한차 방법(Finite difference Method)

y_i의 1차 후진차(backward difference)는 다음과 같이 정의된다.

$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1} \quad (1)$$

2차 후진차는 1차로부터 얻어지며 그 과정은

$$\nabla^2 y_i = y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} \quad (2)$$

식 (2)와 같으며 1차 전진차분(forward difference)은 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (3)$$

식(2)에서 같이 2차 전진차분이 얻어질 수 있다.

$$\Delta^2 y_i = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \quad (4)$$

또한 1차 y_i의 중앙차는

$$\delta y_i = y_{i+1/2} - y_{i-1/2} \quad (5)$$

식(5)와 같으며 1차 중앙차는 간격 중간에서 함수값을 취하는 것이며 같은 논리로 2차 중앙차분은 다음과 같다.

$$\delta^2 y_i = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} \quad (6)$$

미분 방정식을 풀기위한 유한차 방법을 사용하기 위해서는 미분 오퍼레이터를 미분차 오퍼레이터와 연결시키는 것이 필요하다. 유한차와 미분 오퍼레이터의 관계를 규명하기 위해 X에 관한 F(x+h)의 Taylor 급수를 택하면 다음과 같다.

$$f(\chi+h) = f(\chi) + hf'(\chi) + \frac{h^2}{2!} f''(\chi) + \cdots \frac{h^n}{n!} f^n(\chi) + \cdots$$

미분 오퍼레이터 $\frac{d}{d\chi}$ 를 D로 나타내고 $E\, y_i = y_{i+1}$을 이용하면 다음과 같다.

$$E = e^{hD} \quad (7)$$

따라서,

$$D = \frac{1}{h}\left(\nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \cdots\cdots\right) \quad (8)$$

고차 미분 오퍼레이터 D^2, D^3, …… 은 저차 미분 오퍼레이터 적(積)에 의하여 차례로 얻어진다.

△와 D와의 관계를 유도하면 다음과 같다.

$$D = \frac{1}{h}\left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \frac{\Delta^4}{4} + \cdots\cdots\right) \quad (9)$$

D를 δ로 나타내기 위해서는 평균 오퍼레이터 μ는 다음과 같다.

$$\mu = \frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right) \quad (10)$$

따라서,

$$D = \frac{1}{h} \sinh^{-1}(\mu\delta) = \frac{1}{h}\left(\mu\delta - \frac{\mu\delta^3}{6} + \frac{\mu\delta^5}{30} - \cdots\cdots\right) \quad (11)$$

여기서 특히 주목해야 할 사항은 전진(forward)과 후진(backward)차 방법은 주로 초기 조건과 경계조건에 사용되며 중앙(center)차 방식은 일반적인 유한차 방식에 사용된다.